الخميس 8/10/2015   الدوال ذات التغيرات المحدودة

ندرس في هذا الفصل صنفاً مهماً من الدوال هو صنف الدوال ذات التغيرات المحدودة وأول من درسها العالم جوردان وهي تلعب دوراً كبيراً في تعميم مفهوم التكامل المحدد لريمان وتعميمه تكامل ستيلتجس وليبيغ كما أن تطبيقاتها كثيرة ومشهورة في نظرية التقريب.
نظرية الاحتمالات - مقاومة المواد.
كما سندرس نوعاً من الدوال وثيقة الاتصال بهذا الصنف وأهمها الدوال المطردة التي سنبدأ بها.

الدوال المطردة:

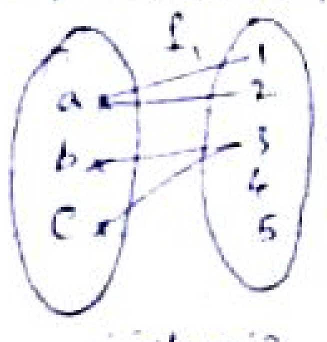
سنعرف الدوال التي نتعامل معها في هذا المقرر على مجالات من الشكل:

$I = [a, b]$, $I =]-\infty, +\infty[$; $-\infty < a < b < \infty$

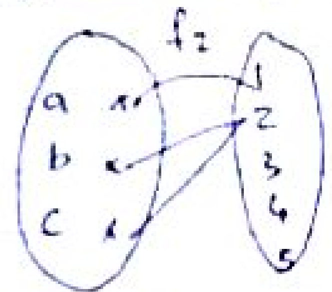
$I = [a, \infty[$, $I =]-\infty, 0]$

x' ——— a [—— 0 ——] b ———→ x

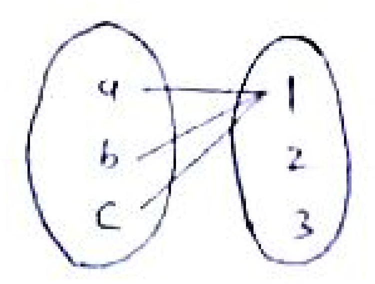
$[a, b]$ مجموعة جزئية من كلما سبق نريد $I \subseteq]-\infty, \infty[= R$
ومجموعها منتهية (مجموعات منتهية) وهذا ما نراه في المخطط التالي.



هذه علاقة



علاقة وتطبيق ودالة غير عددية لأنها غير معرفة على R.



الدالة العددية :

لتكن X، Y مجموعتان $\neq \phi$ وعدديتان من R نسمي التطبيق من المجموعة بقيود

حيث $X \subseteq R$

$Y \subseteq R$

نسمي كل تطبيق من المجموعة العددية المنطلق إلى الثانية العددية بحيث يرفق كل عنصر من X بعنصر وحيد فقط $y \in Y$ ونكتب $f: X \longrightarrow Y$

حيث: $x \longmapsto y = f(x)$

نسمي X (المنطلق) مجموعة تعريف هذه الدالة أو منطلقها و Y مجموعة قيم هذه الدالة أو مستقرها. وليس من الضروري أن يكون المستقر الفعلي هو المستقر الفعلي.

ونسمي العلاقة $y = f(x)$ قاعدة الربط بين x , y .

مثال:

الدالة الخطية $f(x) = 3x + 1$ مجموعة تعريفها $D(f) = R$

ومستقرها الفعلي أي المدى: $R(f) = R =]-\infty, \infty[$

هنا المستقر = الفعلي .

$$f: R \longrightarrow R$$

$$; \quad x \longmapsto y = f(x) = 3x + 1.$$

وكذلك الدالة $y = e^x$

$$D(f) = R \quad , \quad R(f) =]0, \infty[.$$

وتسمى الدالة الأسية.

$y = e^x$

المستقر الفعلي: $e^x : R \longrightarrow R$

$$\infty > e^x > 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \quad , \quad \lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

وكثير من الدوال مثل: $\cos, \sin, [x], \arcsin,$ $\arctan, ch, x^2, \ldots$

الدالة العددية المحدودة :

لتكن الدالة f معرفة بالشكل: $f: I \longrightarrow Y$

حيث I أي مجموعة (مفتوحة، مغلقة، نصف مغلقة)

$N = I = \{1, 2, \ldots\}$.

يقال عن هذه الدالة أيضاً محدودة على I مجموعة تعريفها إذا كان.

$|f(x)| \le k \quad ; \quad x \in I$

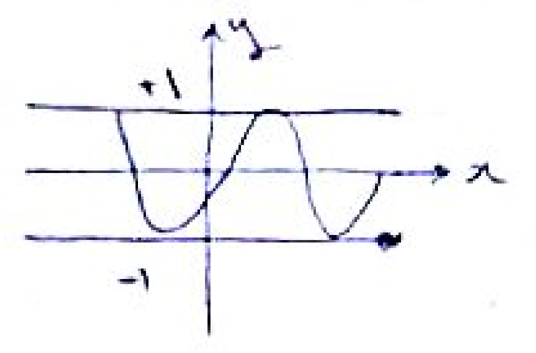
عدد حقيقي موجب

أي تكون مجموعة قيمها هي Y مجموعة محدودة أي محدودة من الأعلى والأدنى أي.

$\alpha \le f(x) \le \beta \quad ; \quad x \in I$.

مثال:

الدالة $f(x) = \sin x$ $\quad D(f) = R$, $R(f) = [-1, +1]$



$\sin : R \longrightarrow [-1, 1]$

$; \; x \longmapsto y = \sin x$.

$-1 \le \sin x \le 1 \; ; \; x \in R$.

أي: $(|\sin x| \le 1)$.

وكذلك الدالة. $g(x) = x^2$,

$g : [0,1] \longrightarrow [0, 1]$

$x \longmapsto y = g(x) = x^2$

حيث: $D(g) = [0,1]$

$R(g) = [0,1]$

بينما الدالة $y = f(x) = e^x$ المعرفة على R ليست محدودة.

لأن مجموعة قيمها المقابلة ليست محدودة.

$D(R) =]0, \infty[\longrightarrow 0 < e^x < \infty$

وهذه الدالة محدودة من الأدنى بالعدد 0 وليست محدودة من الأعلى. حيث:
ولا تتعلق

$\inf_{x \in R} e^{x} = 0 \notin \,]0, \infty[$

$\sup_{x \in R} e^{x} = \infty \rightarrow$ $R \ni$ مصطلح وليس عدد

الدالة المتزايدة (المتزايدة تماماً):

لتكن الدالة $f: I \longrightarrow R$ حيث I ذات فترة (مجموعة) يقال عن هذه الدالة أنها متزايدة (متزايدة تماماً) على I اذا تحقق:

$\forall x_1, x_2 \in I \; ; \; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

$\{ f(x_1) < f(x_2) \}$ اذا تماماً

مثال:

$y = e^{x}$ متزايدة تماماً على $D(f) = R$

حيث:

$\forall x_1, x_2 \in R \; ; \; x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$
$; x \in R$

متزايدة

دالة متزايدة.

$y = e^{x}$

$x_1 \quad x_2$

أما الدالة $f(x) = [x]$ التي تسمى الدالة الدرجية متزايدة على R .
(السلم أو أكبر عدد صحيح).

مجموعة الـ $R \supseteq Z$

قيمها الصحيحة Z

رمزها $[x]$ مثلاً

$[\frac{1}{2}] = 0 \; , \; [\pi] = 3$

$[-1] = -1 \; , \; [0] = 0$

$y = [x]$

$-1 \quad 0$

$x_1 \; x_2$

$x_1 < x_2$ فإن

$f(x_1) = f(x_2)$

الدالة المتناقصة (متناقصة تماما):

نقول أن الدالة متناقصة (متناقصة تماما) على I إذا تحقق:

$$\forall x_1, x_2 \in I ;\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad \text{②}$$

$$\{ f(x_1) > f(x_2) \}$$

نلاحظ من الرسم:

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

مثال:

الدالة $f(x) = x^2$ المتناقصة تماما على المجال $]-\infty, 0]$

وهي متزايدة تماما على المجال $[0, +\infty[$.

نسمي أي دالة من الأنواع السابقة (رتيبة) على I دالة مطردة.

مثال:

الدالة $f(x) = x^2$ (ذات المثال) ليست مطردة على R كما يوضح خطها البياني:

من الدوال اللامطردة دالتا $\sin$, $\cos$ على R ليستا مطردة إلا على فترات مثلا $[0, \frac{\pi}{2}]$ متزايدة.